数理解析研究所講究録
568巻 1985年 94-108

Some aspects of uniformization theory in several complex variables

G. D. Mostow (Yale大)
沼谷賢治 記

Genusが1より大きく、compactな複素曲線Mを考えよう。すると、そこへは、複素平面$\mathbb{C}$の中の単位球面Dからのorbit mapが存在する。

Compactな Kähler曲面Mと、$\mathbb{C}^2$の中の単位球体B^2に対して、同じ様なことは成り立つだろうか?

予想 (Yau 1979). Compactな Kähler曲面Mが、strictに負な断面曲率を持てば、Mは離散群ΓによるB^2の商空間B^2/Γ、と双正則同型になるであろう。

この予想がなされた根拠と思われるものを、いくつか上げよう。

(I) 複素曲線Mを考えると、Gauss-Bonnetの定理から、

$$\int_M K_M \, dM = 2-2g$$

（ここで K_M は Gauss 曲率、g は Genus）、
が従う。よって、$K_M<0$ ならば、$g>1$ 。
このとき、Mは uniformization をもつ。

(II)（Frankel 予想） n 次元 Kähler 多様体 M
が、正の双正則断面曲率をもつならば、M は $\mathbb{CP}^n$
と双正則同型である。

これは、

$n=2$ の場合、Aubin-Frankel によって 1941 年に、

$n=3$ の場合、Mabuchi によって、

n：一般では、Mori (Ann. of Math) 1979 及び Siu-Yau (Invent. Math) 1981

に解かれた。

（Mori は $T(M)$ が ample というより弱い条件しか仮定していない。）

しかし、この予想は正しくなかった。

定理 (Mostow–Siu). Compact Kähler surface M で、strict に負な断面曲率をもち、しかし、その普遍被覆空間が B^2 と双正則同型でないものがある。

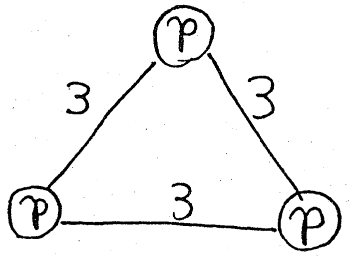
この M については、次のことも分かる。

(I) M は局所対称空間と可微分同相にはならない。

(II) M は正の index をもつ。

(III) M の複素構造は自明でない変形をもたない。さらに強く、M は rigid である。(つまり、M と基本群が同型であるような全ての K(大小) 複素多様体は M と双正則同型である。) (c.f. Kodaira J. Analye Math. 1967 P207–215)。

以下 Mの構成等を行なう。まず $U(2,1)$の部分群 $T(p,t)$を作る。



$V=\bigoplus_{i=1}^{3}\mathbb{C}e_i$, とし、この上の hermit 内積 $\langle\ ,\ \rangle = H$, を、

。$\langle e_i, e_i\rangle = 1$

。$\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = \langle e_3, e_1\rangle = \dfrac{\varphi}{2\sin(\pi/p)}$

$$(\varphi = e^{\sqrt{-1}\pi t/3})\ \left(|t| < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)。$$

で定める。

$R_i : V \to V$ $(i=1,2,3)$ を, $v \in V$ に対して,

$$R_i(v) = v + (e^{2\pi\sqrt{-1}/p} - 1)\langle v, e_i\rangle e_i$$

で定める。

$1 \leq i, j \leq 3$, に対して,

$\Gamma_{i,j}$ を R_i と R_j で生成される群とし

$\Gamma (= T(p,t))$ を R_1, R_2, R_3 で生成され

る群とする。

<u>Claim</u>

(1) ○ R_i は H を不変にする，つまり

$$\langle R_i(v), R_i(w)\rangle = \langle v, w\rangle 。$$

○ H の signature は $(2,1)$ 。

○ 従って，$\Gamma \subset U(H) = U(2,1)$.

(2) $3 \leqq p \leqq 5$ ならば，Γ_{ij} は order が $24(p/(3-p))^2$ の有限群である。

（注、$p \gneqq 5$ である場合は、Γ_{ij} は有限群ではない。この場合はある "Classical object" と関係がある。）

$\mathbb{C}h^2$ の Model，X，を作る。

・$V_- = \{ v \in V \mid \langle v, v\rangle < 0 \}$

・$X = V_- / \mathbb{C}^*$ ，　　　　とする。

（X は $\mathbb{C}P^2$ の部分集合である。）

X は $\mathbb{C}h^2$ と isometric で，その距離関数は，$\nu : V_- \to X$ を projection とすると，

$$d(\nu(v), \nu(w)) = \cosh^{-1}\left\{\frac{|\langle v, w\rangle|}{[\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle]^{1/2}}\right\}$$

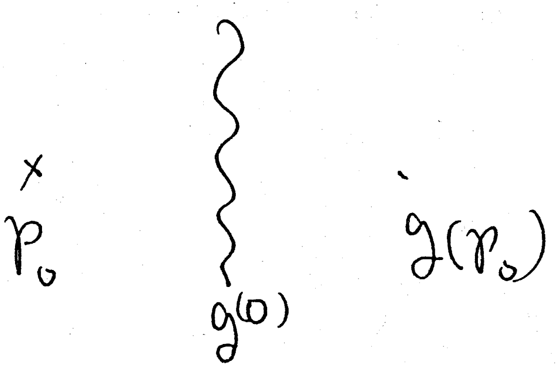
で与えられる。

さて、$p_0 = \nu(e_1+e_2+e_3)$ とおく。

$g \in U(H)$ に対して、次のように $g^{(+)}, g^{(0)}$ を定める。

$$g^{(+)} = \{x \in X \mid d(x, p_0) = d(g(x), p_0)\}$$
$$g^{(0)} = \{x \in X \mid d(x, p_0) = d(g(x), p_0)\}。$$

$g^{(0)}$ はまっすぐ(全測地的)ではない。



$g \in U(H)$ に対して、明らかに、

$g(g^{(0)}) = (g^{-1})^{(0)}$、が成り立つ。

$i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ に対して、

$$F_{ij} = \bigcap_{g\in\Gamma_{ij}} g^{(+)}$$ とし、

$F = F_{12}\cap F_{23}\cap F_{31}$ とする。

又、$g^{(0)}\cap F$ を $\tilde{g}$ と書く。

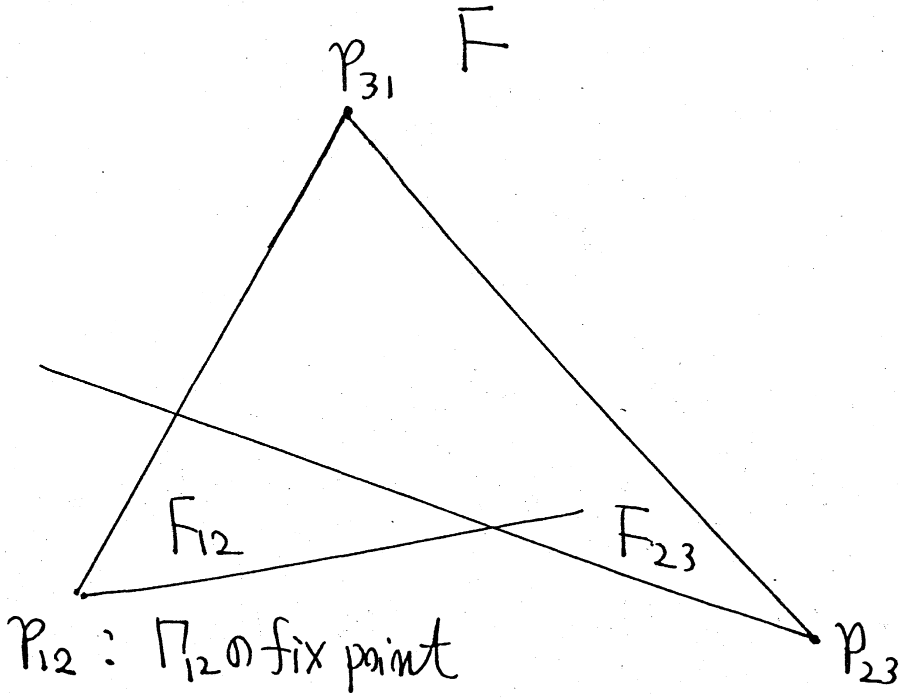
$\tilde{F}$は、次の24個の面をもつ。

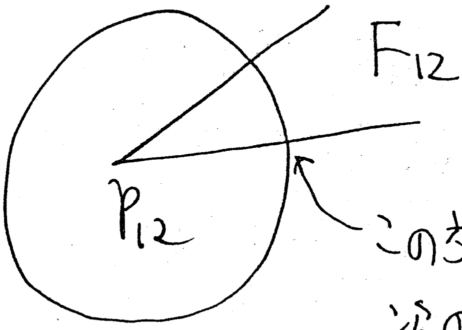
∘ $\widetilde{R_i^{\pm}}$ $(i=1,2,3)$

∘ $\widetilde{(R_iR_j)}^{\pm}$ $((i,j)=(1,2)(2,3)(3,1),(2,1),(3,2),(1,3))$

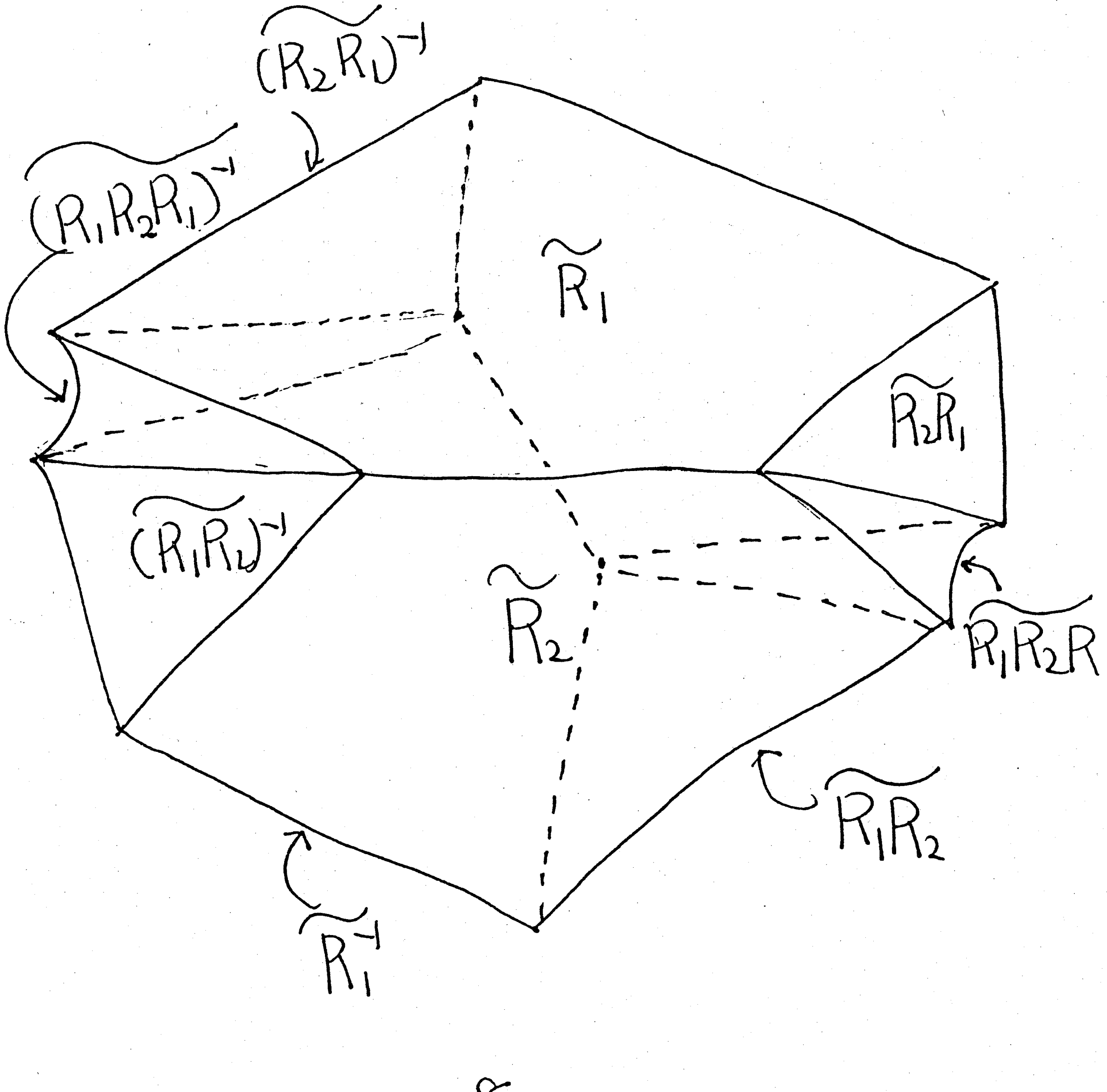
∘ $\widetilde{(R_iR_jR_i)}^{\pm}$ $((i,j)=(1,2)(2,3)(3,1))$。

$(R_iR_jR_i=R_jR_iR_j$ である)。



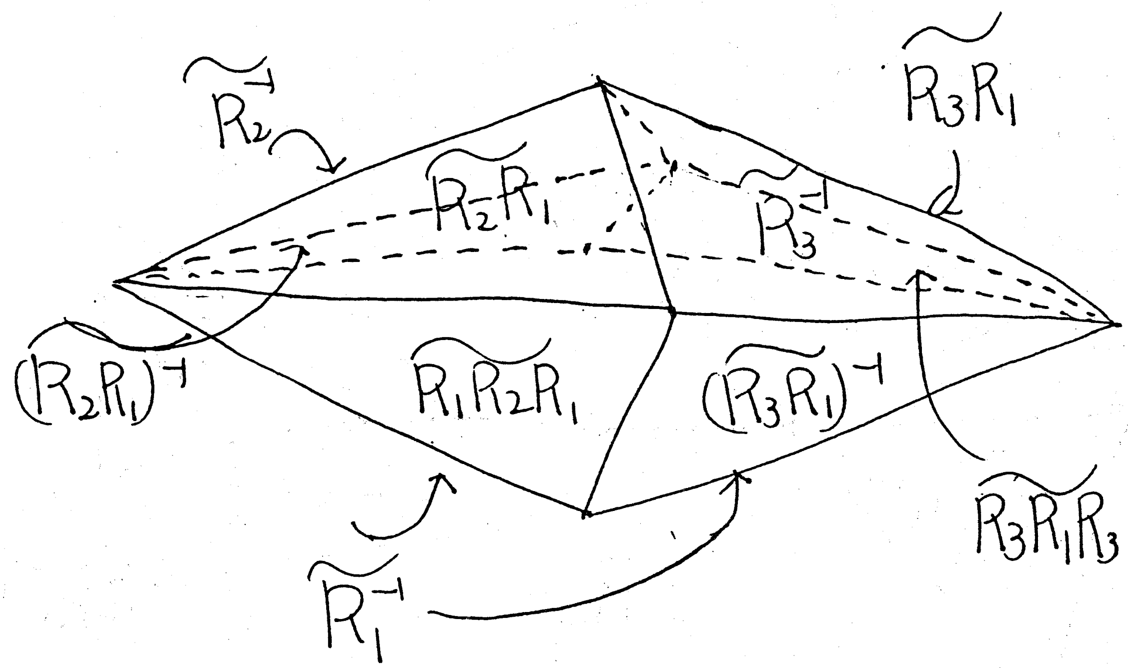


この交りの部分($\subseteq S^3$)の絵は次の通り.

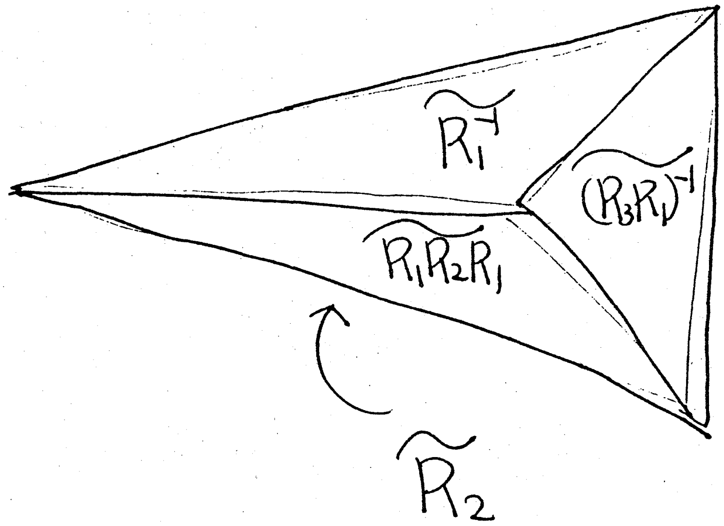


次に3種類のfaceは次のような形をしている。(面に書いた記号はその面で交わっている他のfaceを指す)。

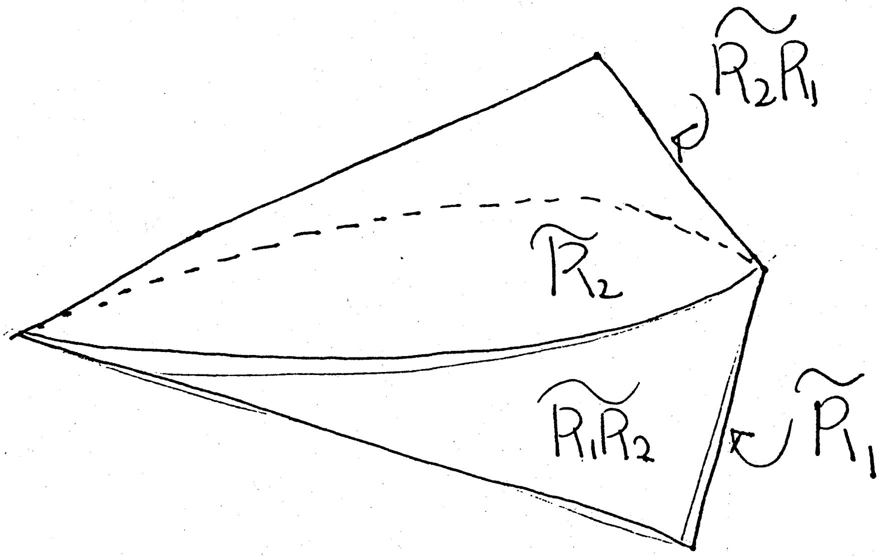
$\widetilde{R_1}$



$\widetilde{R_1 R_2}$



$\widetilde{R_1 R_2 R_1}$



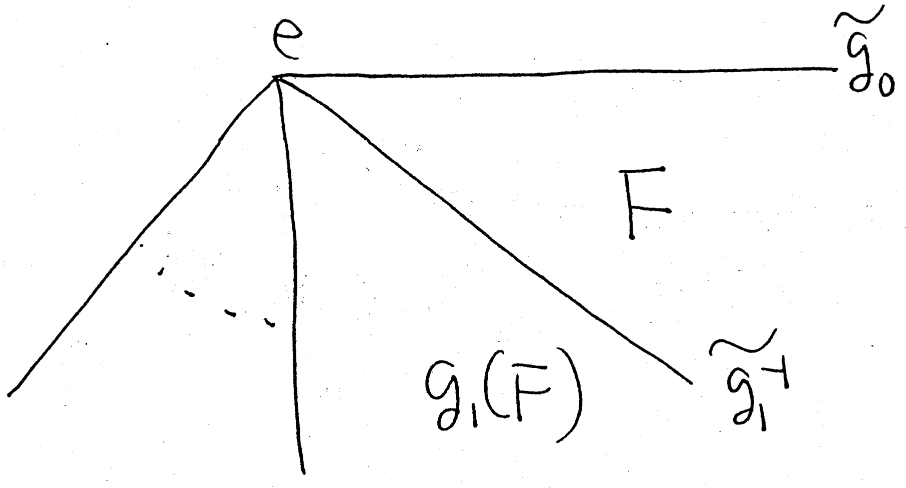
<u>定理</u>　勝手な (Γ, t) に対して，Fは条件 (CD 1) を満たす。

(CD 1) とはおおよそ次のような意味である。
「$g \in \bigcup \Gamma_{ij}$，$\tilde{g}$ はFの余次元が1の face，とすると，$g(\tilde{g}) = \widetilde{g^{-1}}$。」

<u>定義</u>　e，をFの余次元2のfaceとする。このとき，
eでの circuit は good．

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Int}\{(g_1 g_2 \cdots g_n(F)) \cap F\} \neq \emptyset \\ g_i(e) = e \end{cases}$$

なる勝手な $g_1 \cdots g_n$ に対して，
$g_1 g_2 \cdots g_n(F) = F$。



定理

・全ての余次元2のfaceでcircuitがgood

⟺ Γ は $SU(2,1)$ の離散部分群。

・このとき、F は mod $\mathrm{Aut}\,F$ で Γ の基本領域である。

（$\mathrm{Aut}\,F$ は 1 又は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ で後者のときは番号のcyclicな入れ替え $1\to 2\to 3\to 1$ に対応する。）

この定理の条件は17個の (p,t) について満たされる。

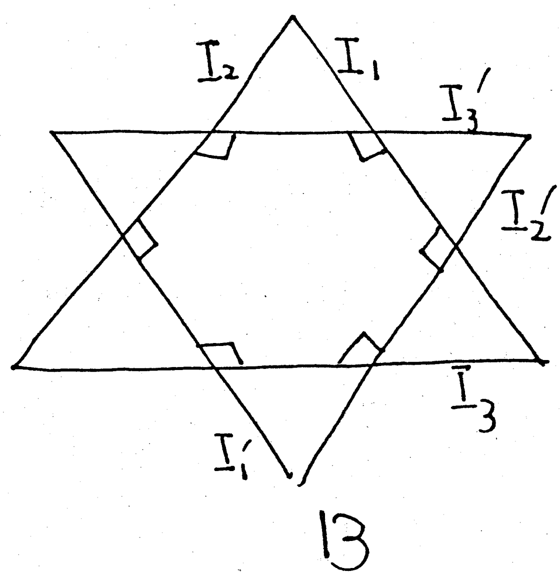
（これらの内のいくつかは $SU(2,1)$ の non arithmetic lattice になる）。

離散部分群にならない場合を考える。まず、3つの頂点 p_{12}, p_{31}, p_{23} のどれかと交わっているような余次元2の face e については、そこでの

circuit は全ての (r, t) に対して good である。3頂点のどれとも交わらない、余次元2の face は次の6つである。

$I_1 = (R_2R_3R_1)^2$ の fix pt. 。
$I_2 = (R_1R_2R_3)^2$ 〃 。
$I_3 = (R_3R_1R_2)^2$ 〃 。
$I_1' = (R_1R_3R_2)$ 〃 。
$I_2' = (R_3R_2R_1)^2$ 〃 。
$I_3' = (R_2R_1R_3)^2$ 〃 。

これらの交わり方は、



これらの回りで，
$g_1 \cdots g_n(F) \cap F \neq \phi \Rightarrow g_1 \cdots g_n(F) = F$
ではないが，かわりに，
$g_1 \cdots g_n(F) \cap F \neq \phi \Rightarrow (g_1 \cdots g_n)^m(F) = F$
となるようにすることが出来る（$t \in \Phi$ のとき。）
すると，Γが作用する複素多様体Yと，
YからCh^2へのΓ-不変な正則写像fで，
。群ΓのYへの作用は properly disconti.
。$\Gamma \cdot \{f^{-1}(I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_1' \cup I_2' \cup I_3')\}$の外
　ではfは双正則。
。$\Gamma \cdot (I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_1' \cup I_2' \cup I_3')$の上では$f$は local に
　$(z_1, z_2) \to (z_1^{m_1}, z_2^{m_2})$ の形をしている。
なる3条件をみたすものがとれる。

Yに，負曲率計量を入れる。

I_1, I_2, I_3 の回りの circuit は good
I_1', I_2', I_3' の回りの circuit は bad,
である場合を考える。
このとき, $Y\ f^{-1}(I_1' \cup I_2' \cup I_3')$ の外では,
f によって $\mathbb{C}h^2$ の metric から induce
される metric を Y に入れ,
$f^{-1}(I_1' \cup I_2' \cup I_3')$ の近傍では, それ
と, 領域 $\{(z_1, z_2) \mid |z_1|^{2m} + |z_2|^2 < 1\}$
の Bergman 計量をたし合わせた metric
を入れる。こうして得られた Y の
metric は負曲率で, Y/Γ が求
めるものである。(これの普遍
被覆が Ball B^2 ではないこと
は特性類を計算することで
示す。)

G. D. Mostow, Pacific. J. Math. 86 171–276
G. D. Mostow – Y. T. Siu, Ann. of Math. 112, 321–360